Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра прикладной математики

519.1(07)
Э157

А.Ю. Эвнин

Элементарное введение в матроиды

Учебное пособие

Электронная версия

Челябинск
Издательство ЮУрГУ
2005

УДК 519.151(075.8)

Эвнин А.Ю. **Элементарное введение в матроиды:** Учебное пособие. Электронная версия. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2005. – 40 с.

В учебном пособии рассматриваются простейшие факты теории матроидов, а также приводятся новые результаты по перечислению матроидов. Матроиды являются теоретической основой изучения жадных алгоритмов, применяются в криптографии и при анализе надёжности электрических схем. Книга ориентирована на студентов специальностей "Прикладная математика", "Прикладная математика и информатика", "Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем", изучающих дискретную оптимизацию.

Ил. 8, табл. 2, список лит. — 15 назв.

Одобрено научно-методическим советом по математике и механике.

Рецензенты:
д. ф.-м. н. *М.М. Кипнис,* ЧГПУ,
к. ф.-м. н. *С.М. Воронин,* ЧелГУ.

ISBN 5–696–00974–3

Оглавление

Предисловие 4

1. Определения и примеры 5
2. Двойственность 8
3. Представимые матроиды 9
4. Ранговая функция 10
5. Жадный алгоритм 12
6. Одна задача планирования эксперимента 16
7. Трансверсали 17
8. Трансверсальный матроид 20
9. Независимые трансверсали 22
10. Общие трансверсали 24
11. Некоторые интересные матроиды 26
    11.1. Матроид Фано 26
    11.2. Матроид Вамоса 29
12. Перечисление матроидов 32
13. Упражнения 34

Библиографический список 40

Предисловие

Матроиды были введены в 1935 г. Пионерская работа Х. Уитни называлась "On the abstract properties of linear dependence" ("К абстактным свойствам линейной зависимости"). Х. Уитни обнаружил, что можно с единых позиций рассматривать понятия зависимости в линейной алгебре и теории графов. Синтез идей различных областей математики является основой плодотворного развития теории матроидов.

Матроидные стуктуры естественным образом возникают в теории комбинаторной оптимизации, являясь основой применения так называемых "жадных" алгоритмов (см. §5). Исследования в этой области начались в конце 50-х годов прошлого века. Позднее теория матроидов нашла своё применение и при анализе надёжности электрических схем.

Конец XX века ознаменовался бурным развитием криптографии. В книге [3] показана связь *идеальных схем разделения секрета* с матроидами.

В силу своей молодости теория матроидов отражена в имеющейся литературе весьма скромно. В нашем библиографическом списке приведён достаточно полный перечень изданных на русском языке учебников для вузов, в которых имеются главы, посвящённые матроидам. При создании данного учебного пособия была также использована монография [13], из которой, в частности, позаимствованы изящное доказательство теоремы Эдмондса – Фалкерсона (§8) и ряд упражнений.

В предлагаемом читателю учебном пособии представлены начальные понятия теории матроидов, включая связь матроидов с жадными алгоритмами и теорией трансверсалей.

Ряд материалов пособия оригинальны. Так, в §11 приводятся авторские доказательства свойств матроидов Фано и Вамоса, имеющие элементарный характер и доступные уже при начальном ознакомлении с предметом. В §12 представлены некоторые новые результаты по перечислению матроидов, полученные в дипломных работах выпускников кафедры прикладной математики ЮУрГУ С.А. Новокшонова и А.С. Радионова. Факты, лёгшие в основу задач 20–23 из §13, были сначала обнаружены экспериментально по результатам работы компьютерной программы, перечисляющей трансверсальные матроиды, которая составлена А.С. Радионовым. Задача 17 предлагалась на Международном математическом турнире городов осенью 2003 г.

Электронный адрес автора: evnin@prima.susu.ac.ru. Буду благодарен за замечания и советы.

А.Ю. Эвнин, 15 августа 2005 г.

1. Определения и примеры

Матроид — это упорядоченная пара $M = \langle E, J \rangle$, где
E — непустое конечное множество;
J — совокупность подмножеств множества E, удовлетворяющая следующим условиям (*аксиомам независимости*):

(J0) $\phi \in J$;

(J1) если $A \in J$ и $B \subset A$, то $B \in J$;

(J2) если $A \in J$, $B \in J$ и $|A| = |B| + 1$, то существует такой элемент e, принадлежащий A и не принадлежащий B, что $B \cup \{e\} \in J$.

Элементы множества J называют **независимыми множествами**. Таким образом, аксиома J1 говорит о том, что подмножество независимого множества также является независимым, а аксиома J2 утверждает: если имеются два независимых множества, мощности которых отличаются на единицу, то в более мощном множестве есть элемент, который отсутствует в менее мощном, и при добавлении которого к последнему вновь получится независимое множество.

Базис — это максимальное по включению независимое множество (то есть если A — базис, $A \subset B$ и $A \neq B$, то множество B не является независимым).

В силу конечности множества E в матроиде существует хотя бы один базис.

Ранг матроида — количество элементов в любом его базисе.

Докажем корректность последнего определения: убедимся в том, что в любых двух базисах количество элементов одинаково. От противного: пусть имеются два различных базиса A и B, и в множестве A элементов больше, чем в B. Существует подмножество $A' \subset A$ такое, что $|A'| = |B| + 1$. По аксиоме J1 множество A' — независимое, а по аксиоме J2 найдётся элемент $e \in A' \setminus B$ такой, что множество $B \cup \{e\}$ независимо, но тогда множество B не является максимальным по включению независимым множеством, то есть базисом — противоречие!

Очевидно, что максимальное по мощности независимое множество является и максимальным по включению, то есть базисом. Таким образом, любое независимое множество в матроиде M мощности, равной его рангу, есть базис.

Взяв произвольное независимое множество B и некоторый фиксированный базис A с помощью свойства J2 можно в множестве A выбрать $|A| - |B|$ элементов, при добавлении которых к множеству B получится независимое множество мощности $|A|$, то есть базис. Мы доказали, что *всякое независимое множество можно дополнить до базиса.*

Множество $A \subset E$, которое в матроиде $M = \langle E, J \rangle$ не является независимым, называется **зависимым**.

Цикл — это минимальное по включению зависимое множество (то есть если A — цикл, $B \subset A$ и $B \neq A$, то множество B — независимое).

Пусть дан матроид $M = \langle E, J \rangle$. Мощность множества E называют **порядком матроида** M.

Примеры матроидов

1. **Тривиальный матроид** — матроид $\langle E, \{\phi\} \rangle$; в нём единственным независимым множеством (значит, и единственным базисом) является пустое множество. Ранг тривиального матроида равен нулю, а любое одноэлементное подмножество множества E является циклом.

2. **Дискретный матроид** — матроид $\langle E, \beta(E) \rangle$, где $\beta(E)$ — множество всех подмножеств множества E. В дискретном матроиде все множества являются независимыми, имеется единственный базис — само множество E, а циклов вовсе нет. Ранг дискретного матроида равен $|E|$.

3. **k-однородный матроид** — матроид $\langle E, J \rangle$, в котором любое k-элементное подмножество множества E является базисом. Здесь любое множество, в котором не более k элементов, является независимым. Проверка выполнения аксиом матроида тривиальна. Заметим, что дискретный матроид $\langle E, \beta(E) \rangle$ является $|E|$-однородным, а тривиальный матроид — 0-однородным. В k-однородном матроиде (при $k < |E|$) циклом является любое $k+1$-элементное множество. Ранг k-однородного матроида равен k. Имеется специальное обозначение для k-однородного матроида, заданного на n-элементном множестве: $U_{k,n}$.

4. Пусть E — конечная система векторов некоторого линейного пространства над полем F, а J состоит из всех линейно независимых систем векторов из E, а также пустого множества. Тогда, как известно из линейной алгебры, свойства J1 и J2 будут выполнены. Свойство J0 выполнено по определению. Поэтому $\langle E, J \rangle$ — матроид. Его называют **векторным**.[1]

5. Пусть A — числовая матрица с элементами из поля F размера $m \times n$. Будем смотреть на столбцы этой матрицы как на векторы пространства F^m. Тогда столбцы матрицы A образуют векторный матроид; будем называть его **матричным матроидом**, или (точнее) **матроидом столбцов матрицы** A. Обозначение: $M[A]$. Аналогично вводится **матроид строк матрицы**. Легко видеть, что ранг матрицы A равен рангу соответствующего матричного матроида.

[1] Иногда (например, в [5]) дают более узкое определение векторного матроида, предполагая, что векторы из системы E попарно различны.

6. Пусть G — граф, E — множество его рёбер. Объявим независимыми те подмножества E, которые состоят из рёбер некоторого леса. Как известно из теории графов, свойства J0, J1 и J2 будут при этом выполнены. Полученный матроид называют **матроидом циклов** графа G и обозначают $M(G)$. Цикл матроида будут составлять рёбра, образующие простую замкнутую цепь в графе G (то есть цикл, в котором каждая вершина встречается ровно один раз).

7. Пусть G — граф, E — множество его рёбер. Объявим зависимыми те подмножества E, которые являются разделяющими множествами. Опять же из результатов теории графов следует выполнение аксиом матроида. Полученный матроид называют **матроидом разрезов** графа G и обозначают $M^*(G)$. Циклу этого матроида будет соответствовать разрез графа G, а базису — дополнение к множеству рёбер любого остовного леса графа.

Изоморфизм матроидов

Матроиды $M_1 = \langle E_1, J_1\rangle$ и $M_2 = \langle E_2, J_2\rangle$ называются **изоморфными**, если существует биекция (взаимно однозначное отображение) $\varphi : E_1 \to E_2$, сохраняющая независимость; другими словами, множество $A \subset E_1$ является независимым в матроиде M_1 тогда и только тогда, когда образ этого множества при заданном отображении $\varphi(A)$ есть независимое множество в матроиде M_2.

Пример. Матроид циклов графа G, изображённого на рис. 1, изоморфен

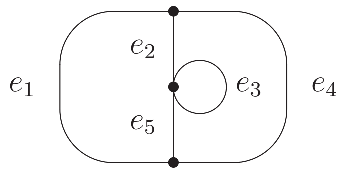

Рис. 1:

матроиду столбцов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, рассматриваемой над произвольным числовым полем.

Введём ещё несколько определений.

Матроид — **графический**, если он изоморфен матроиду циклов некоторого графа.

Матроид — **кографический**, если он изоморфен матроиду разрезов некоторого графа.

Наконец, если матроид является одновременно графическим и кографическим, то его называют **планарным**. Это название объясняется тем, что планарный матроид изоморфен матроиду циклов планарного графа (доказательство см. в [1]).

Для того, чтобы лучше освоиться с новыми понятиями, советуем читателю решить соответствующие упражнения, помещённые в последнем разделе книги.

2. Двойственность

Пусть $M = \langle E, J\rangle$ — матроид. Обозначим через J^* множество всех подмножеств дополнений к базисам матроида M. Оказывается, что $M^* = \langle E, J^*\rangle$ — также матроид (доказательство этого утверждения можно найти в [5]); его называют **двойственным** к M матроидом. Легко видеть, что базисы двойственного матроида — это дополнения к базисам исходного матроида. Отсюда сразу вытекает, что $(M^*)^* = M$ — матроид, двойственный двойственному M, есть M.

Теорема 1. *Для любого графа G матроид его разрезов является двойственным матроиду циклов.*

Доказательство. Пусть E — множество рёбер графа G. Можно считать, что в G нет изолированных вершин.

Рассмотрим произвольный базис B в матроиде циклов $M(G)$. Нужно доказать, что $E \setminus B$ — базис в матроиде разрезов $M^*(G)$. Базис в $M(G)$ есть остовный лес графа G. Базис в $M^*(G)$ — максимальное по включению неразделяющее множество в графе G. При удалении из графа рёбер, составляющих $E \setminus B$, остаётся остовный лес, т.е. число компонент связности графа не изменяется — поэтому множество $E \setminus B$ не является разделяющим. Если оно не максимально по включению, то для некоторого ребра $e \notin E \setminus B$ неразделяющим будет множество $B' = E \setminus B \cup \{e\}$. Но тогда дополнение к B' содержит остовный лес W. Заметим теперь, что $|E \setminus B'| < |B|$, откуда $|W| < |B|$, в то время как любые два остовных леса (одного и того же графа) имеют одинаковую мощность.

Обратно. Пусть D — базис в $M^*(G)$. Нужно убедиться в том, что $E \setminus D$ — остовный лес. Поскольку D — неразделяющее множество, $E \setminus D$ покрывает все вершины графа G. Если в $E \setminus D$ есть цикл, возьмём ребро e, входящее в него. Тогда $D \cup \{e\}$ — также неразделяющее множество вопреки предположению. Значит, $E \setminus D$ — лес, и притом — остовный. $\square$

3. Представимые матроиды

Матроид **представим над полем** F, если он изоморфен некоторому векторному матроиду над этим полем. Если матроид представим над любым полем, его называют **регулярным**. В случае представимости матроида над полем $GF(2)$ его называют **бинарным**, а над полем $GF(3)$ — **тернарным**.

Теорема 2. *Графический матроид является бинарным.*

Доказательство. Нужно убедиться в том, что матроид циклов произвольного графа G представим над полем $GF(2)$. Составим матрицу $A = (a_{ij})$ инцидентности графа G. Строки этой матрицы соответствуют вершинам графа, а столбцы — рёбрам. Если j-е ребро есть петля, инцидентная i-й вершине, то $a_{ij} = 2$, иначе

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я вершина инцидентна } j\text{-му ребру;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Заменим в этой матрице двойки нулями, оставив для матрицы прежнее обозначение.

Итак, мы имеем составленную из нулей и единиц матрицу A. Петле графа соответствует нулевой столбец, а столбцы, отвечающие кратным рёбрам, — одинаковые. Докажем, что матроид столбцов этой матрицы над полем $GF(2)$ изоморфен $M(G)$, то есть что столбцы линейно зависимы над $GF(2)$ тогда и только тогда, когда соответствующие им рёбра графа G содержат цикл.

Нетривиальная линейная комбинация векторов над указанным полем есть просто сумма некоторых из данных векторов. Значит, если некоторые столбцы матрицы A линейно зависимы, то среди них можно выделить столбцы с нулевой суммой. Рассмотрим подграф G' графа G с рёбрами, соответствующими этим столбцам. Очевидно, степень каждой вершины в этом подграфе есть чётное число. Стало быть, в G' есть цикл (хотя бы потому, что G' есть объединение эйлеровых графов, а в эйлеровом графе есть эйлеров цикл; впрочем, и непосредственное доказательство указанного факта весьма несложно).

Обратно. Пусть некоторое множество рёбер содержит цикл. Если среди них есть петля, то отвечающий ей нулевой столбец обеспечивает линейную зависимость столбцов.

Рассмотрим теперь столбцы, отвечающие рёбрам простого цикла длины больше 1. Любая строка матрицы A содержит в этих столбцах ровно две единицы. Поэтому сумма указанных столбцов (по модулю 2) равна нулевому столбцу, что означает линейную зависимость исходного множества столбцов.□

Заметим, что имеется существенное усиление доказанной теоремы. Оказывается, *любой графический матроид является регулярным; то же верно и для любого кографического матроида.*

Кроме того, достаточным условием регулярности матроида является его представимость над $GF(2)$ и $GF(3)$, то есть
матроид регулярен тогда и только тогда, когда он одновременно является бинарным и тернарным.

Доказательства этих утверждений имеются в монографии [13].

4. Ранговая функция

Пусть $M = \langle E, J \rangle$ — матроид. Для множества $A \subset E$ определим **сужение матроида M на множество A** как матроид $M|A = \langle A, J' \rangle$, где множество J' образовано всеми подмножествами множества A, являющимися независимыми множествами матроида M:

$$J' = \{X \mid X \subset A, X \in J\}.$$

То, что $M|A$ — действительно матроид, очевидно.

Назовём ранг матроида $M|A$ **рангом** множества A (обозначение $\rho(A)$), а каждый базис этого матроида — **базой** множества A. Таким образом, $\rho(A)$ — это наибольшая мощность независимого подмножества множества A. Заметим, что $M|E = M$, и поэтому ранг матроида $M = \langle E, J \rangle$ равен рангу множества E, а базис матроида есть база множества, на котором он определён. Очевидно также, что $\rho(\phi) = 0$, и если $A \in J$, то $\rho(A) = |A|$ (ранг независимого множества равен его мощности).

Отметим следующие свойства ранговой функции ρ:

($\rho 1$) $\forall A \subset E \;\; 0 \le \rho(A) \le |A|$;

($\rho 2$) если $A \subset B$, то $\rho(A) \le \rho(B)$ (*монотонность*);

($\rho 3$) $\forall A, B \subset E \;\; \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \le \rho(A) + \rho(B)$ (*полумодулярность*).

Выполнение свойств $\rho 1$ и $\rho 2$ очевидно. Докажем $\rho 3$.

Пусть X — база множества $A \cap B$. С помощью свойства J2 множество X можно дополнить до базы множества A; обозначим полученную базу через Y. Аналогично, Y дополняется до базы Z множества $A \cup B$. Итак, имеем

$$X \subset Y \subset Z \;\; \text{и} \;\; \rho(A \cap B) = |X|, \;\; \rho(A) = |Y|, \;\; \rho(A \cup B) = |Z|.$$

Необходимо доказать, что

$$|Z| + |X| \le |Y| + \rho(B). \tag{$*$}$$

Заметим, что по построению $X \cup (Z \setminus Y) \subset B$. Отсюда $\rho(X \cup (Z \setminus Y)) \leq \rho(B)$. Кроме того, множество $X \cup (Z \setminus Y)$ является подмножеством независимого множества Z, и, в силу J1, само независимо. Значит,

$$\rho(X \cup (Z \setminus Y)) = |X \cup (Z \setminus Y)| = |X| + |Z| - |Y|.$$

Таким образом, $|X| + |Z| - |Y| \leq \rho(B)$, что равносильно неравенству $(*)$.$\square$

Покажем теперь, что матроид можно задать через ранговую функцию.

Теорема 3. *Пусть на подмножествах множества E определена целозначная функция ρ, удовлетворяющая условиям $\rho1$, $\rho2$, $\rho3$, а множество J состоит из всех тех подмножеств A множества E, для которых $\rho(A) = |A|$. Тогда $M = \langle E, J \rangle$ суть матроид.*

Доказательство. Свойство J0 следует непосредственно из $\rho1$.

Докажем J1. Пусть $\rho(A) = |A|$ и $B \subset A$. Благодаря полумодулярности функции ρ имеем

$$\rho(B \cup (A \setminus B)) + \rho(B \cap (A \setminus B)) \leq \rho(B) + \rho(A \setminus B).$$

Но $B \cup (A \setminus B) = A$, и $\rho(A) = |A|$, а $B \cap (A \setminus B) = \phi$, и $\rho(\phi) = 0$. Поэтому, учитывая также свойство $\rho1$ и то, что $B \subset A$, получаем

$$|A| = \rho(A) \leq \rho(B) + \rho(A \setminus B) \leq |B| + |A \setminus B| = |B| + |A| - |B| = |A|.$$

Поскольку на концах этой цепочки соотношений стоит одно и то же число, всюду в ней на самом деле выполняются равенства, в частности, $\rho(B) = |B|$. Таким образом, $B \in J$.

Свойство J2 будем доказывать от противного. Пусть $A,\ B \in J$, $|B| = k,\ |A| = k + 1$. Если $B \subset A$, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $|A \setminus B| \geq 2$. Предположим, что для любого элемента $e \in A \setminus B$ неверно, что $B \cup \{e\} \in J$. Тогда $\rho(B \cup \{e\}) \neq k + 1$ и, в силу соотношений $k = \rho(B) \leq \rho(B \cup \{e\}) \leq |B \cup \{e\}| = k + 1$ и целочисленности функции ρ, имеем $\rho(B \cup \{e\}) = k$. Возьмём в качестве e два различных элемента c и d и пусть $C = B \cup \{c\},\ D = B \cup \{d\}$. Тогда $C \cup D = B \cup \{c, d\}$ и $C \cap D = B$. Поэтому

$$\rho(B \cup \{c, d\}) + \rho(B) = \rho(C \cup D) + \rho(C \cap D) \leq \rho(C) + \rho(D) \leq k + k,$$

откуда $\rho(B \cup \{c, d\}) \leq k$. Так как $\rho(B \cup \{c, d\}) \geq \rho(B) = k$, получаем $\rho(B \cup \{c, d\}) = k$. Итак, при добавлении к множеству B двух элементов из $A \setminus B$ мы получили множество с прежним значением функции ρ.

Если, в множестве $A \setminus B$, кроме c и d, есть ещё, например, элемент f, положим $C = B \cup \{c, d\}$, $D = B \cup \{f\}$ и, повторив предыдущие выкладки, получим, что $\rho(B \cup \{c, d, f\}) = k$.

Добавляя к множеству B последовательно элементы из $A \setminus B$, мы рано или поздно придём к множеству $B \cup A$, и при этом окажется, что $\rho(B \cup A) = k$, в то время как $\rho(B \cup A) \geq \rho(A) = k + 1$. Противоречие получено. □

5. Жадный алгоритм

Весьма общей является следующая задача оптимизации.

Пусть каждому элементу e непустого конечного множества E поставлено в соответствие неотрицательное число $w(e)$, называемое **весом** этого элемента. **Вес подмножества** $X \subset E$ определяется как сумма весов его элементов:

$$w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

Рассматривается некоторая совокупность J подмножеств множества E. Требуется найти в J подмножество максимального веса.

Подобный вид имеют или сводятся к нему многие задачи: например, задача коммивояжёра, задача о рюкзаке, задача о минимальном стягивающем дереве и другие.

Жадный алгоритм решения описанной задачи состоит в последовательном, элемент за элементом, формировании искомого множества, причём на каждом шаге из всех элементов множества E, добавление которых к ранее выбранным возможно (то есть приводит к к некоторому множеству из J), выбирается элемент наибольшего веса.

Формально алгоритм можно описать так.

1. В качестве e_1 выбрать элемент, удовлетворяющий условию

$$w(e_1) = \max_{\{e\} \in J} w(e).$$

Следующий шаг выполнять до тех пор, пока он приводит к расширению формируемого множества S.

2. Если $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}$, то в качестве очередного элемента множества S выбрать элемент e_k такой, что

$$w(e_k) = \max\{w(e) \mid \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e\} \in J,\ e \notin \{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}\}\}.$$

Конкретная реализация жадного алгоритма зависит во многом от того, что представляет собой множество J.

Пример 0. Пусть $E = \{1, 2, 3\}$, $J = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$, $w(1) = 3$, $w(2) = 2$, $w(3) = 4$. Действуя по жадному алгоритму, мы последовательно получим: $e_1 = 1$, $e_2 = 2$ и множество $\{1, 2\}$ веса 5, в то время как входящее в J множество $\{2, 3\}$ имеет вес 6. Жадность не помогла! Она не всегда дальновидна!

Пример 1. В задаче коммивояжёра требуется найти замкнутый маршрут наименьшей длины, проходящий через заданные города. Здесь E — множество дорог между городами, в роли веса дороги выступает её длина. Жадная стратегия для задачи коммивояжёра состоит в том, что, начав маршрут в произвольном городе, в качестве очередного города на каждом шаге выбираем такой ранее не посещённый город, к которому ведёт самая короткая дорога.

Пример 2. В задаче о минимальном стягивающем дереве требуется в заданном связном взвешенном графе $G = \langle V, E\rangle$ выделить стягивающее дерево минимального веса. Здесь E — множество рёбер графа, а J состоит из всех его стягивающих деревьев. Если $w'(e)$ — вес ребра e, а число M больше веса любого ребра, то положив $w(e) = M - w'(e)$, перейдём от задачи минимизации к задаче максимизации. Это стандартный приём, но ценность его скорее чисто теоретическая, поскольку ещё проще в описанном алгоритме заменить всюду нахождение максимума нахождением минимума. Различные способы реализации жадной стратегии для нахождения минимального стягивающего дерева (алгоритмы Краскала и Прима) обсуждаются в [11]. Очень интересным является также алгоритм Бёржа, описанный в монографии [7].

Известно, что жадный алгоритм для задачи из примера 2 всегда даёт оптимальное решение, а для задачи из примера 1 — не всегда.

В этом разделе мы выясним, каким требованиям должна удовлетворять совокупность множеств J, чтобы жадная стратегия приводила к оптимальному решению.

Теорема 4. *Пусть $M = \langle E, J\rangle$ — матроид, а на множестве E определена функция веса $w : E \to R^+$. Тогда жадный алгоритм выделяет независимое подмножество E наибольшего веса.*

Доказательство. Пусть в результате работы жадного алгоритма сформировано множество $I = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$. По смыслу алгоритма элементы этого множества проиндексированы в порядке убывания их веса:

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_s).$$

Возьмём в E произвольное независимое подмножество $L = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_t\}$ максимального веса, считая, что

$$w(e'_1) \geq w(e'_2) \geq \ldots \geq w(e'_t).$$

Заметим, что множество L максимально по включению среди множеств, входящих в J (иначе его можно расширить, а вес при этом не уменьшится). Множество I максимально по включению по самому смыслу жадного алгоритма. Таким образом, и L, и I — базисы матроида. Значит, как нам уже известно, в них поровну элементов: $t = s$.

Докажем по индукции, что для любого i верно неравенство $w(e_i) \geq w(e'_i)$. *База индукции* обеспечена первым шагом жадного алгоритма.

Пусть теперь для любого $k < n$ уже установлено, что $w(e_k) \geq w(e'_k)$. Нужно доказать, что $w(e_n) \geq w(e'_n)$.

Предположим, что это не так: $w(e_n) < w(e'_n)$. Сформируем множество

$$A = \{e \in E \mid w(e) \geq w(e'_n)\}.$$

Рассмотрим ограничение матроида $M = \langle E, J \rangle$ на множество A — матроид $M' = M|A$. Поскольку

$$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_{n-1}) \geq w(e'_{n-1}) \geq w(e'_n),$$

множество $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ является подмножеством множества A. Это множество независимо (будучи подмножеством независимого множества I) и максимально по включению. Действительно, если в A имеется более широкое независимое подмножество $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e\}$, то $w(e) \geq w(e'_n) > w(e_n)$, и жадный алгоритм должен бы был на n-м шаге включать в формируемое множество вместо элемента e_n элемент e. Итак, B — базис в матроиде M'. Однако, в M' содержится и независимое множество $C = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ (оно является подмножеством независимого множества L). Получилось, что в некотором независимом множестве матроида M' элементов больше, чем в его базисе. Противоречие!

Итак, для всех i справедливо неравенство $w(e_i) \geq w(e'_i)$. Тогда

$$w(I) = \sum_{i=1}^{s} w(e_i) \geq \sum_{i=1}^{s} w(e'_i) = w(L).$$

Значит, I — независимое подмножество максимального веса. □

Доказательство теоремы показывает, что для задачи с матроидной структурой в оптимальном решении I по сравнению с произвольным независимым множеством L больше (если выразиться более аккуратно, не меньше) не только вес всего множества, но также вес i-го по весу элемента для каждого i. Интересной особенностью оптимального решения является также то, что оно целиком определяется упорядочением весов элементов множества E, но не их конкретными значениями.

Здесь же отметим, чем жадные алгоритмы привлекательны для программистов. Во-первых, эти алгоритмы обычно легки для программирования (вспомним, например, алгоритм Прима). Во-вторых, они имеют, как правило, полиномиальные оценки трудоёмкости. Это объясняется тем, что искомое множество формируется элемент за элементом, в отличие от алгоритмов типа перебора с возвратом, для которых характерна экспоненциальная трудоёмкость.

Итак, в случае матроидной структуры подмножеств жадный алгоритм приводит к оптимальному решению. Оказывается, справедливо и обратное утверждение, возникающее при естественном предположении о замкнутости системы множеств относительно включения.

Теорема 5. *Пусть J — непустая система подмножеств множества E такая, что выполняется условие J1. Если для любой весовой функции $w : E \to R^+$ жадный алгоритм находит подмножество E наибольшего веса, то $\langle E, J\rangle$ — матроид.*

Доказательство. Достаточно привести пример весовой функции, для которой жадный алгоритм, применённый к задаче, в которой выполняются условия J0 и J1 и не выполняется условие J2, не даёт оптимального решения.

Пусть подмножества A и B множества E таковы, что $|A| = k + 1$, $|B| = k$, и для любого элемента $e \in A \setminus B$ множество $B \cup \{e\}$ не входит в J. Определим весовую функцию следующим образом:

$$w(e) = \begin{cases} k+2, & \text{если} \quad e \in B; \\ k+1, & \text{если} \quad e \in A \setminus B; \\ 0, & \text{если} \quad e \notin A \cup B. \end{cases}$$

Жадный алгоритм сначала выберет все k элементов множества B, после чего не сможет добавить к нему ни одного элемента ненулевого веса. Таким образом, будет сформировано подмножество веса $(k+2)k = k^2 + 2k$. С другой стороны, множество A имеет заведомо бóльший вес, поскольку вес каждого из $k+1$ его элементов не меньше, чем $k+1$, и

$$w(A) \geq (k+1)^2 > k^2 + 2k.$$

Жадный алгоритм не привёл к оптимальному решению задачи. □

6. Одна задача планирования эксперимента

Следуя [4], рассмотрим задачу практического характера, в которой возникает структура матроида.

Пусть некоторый объект подвергается воздействию нескольких независимых факторов. В результате единичного эксперимента можно найти некоторую числовую характеристику объекта, которая является функцией значений указанных факторов. В случае линейной модели эта функция имеет вид:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

где f — числовая характеристика объекта, n — общее количество факторов, x_i — значения факторов, c_i — коэффициенты, которые надлежит определить в результате проведения серии экспериментов. По техническим причинам факторы могут встречаться только в определённых комбинациях. Будем считать, что таких комбинаций m, причём $m \geq n$.

Пример. Пусть изучается влияние содержания различных минералов в почве на повышение урожайности некоторой зерновой культуры. При этом в распоряжении экспериментаторов имеется m различных удобрений, каждое из которых представляет собой смесь указанных минералов в определённых пропорциях.

В принципе можно провести m различных экспериментов и получить m уравнений:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \ldots & + & a_{1n}c_n & = & f_1; \\
a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \ldots & + & a_{2n}c_n & = & f_2; \\
 & & & & \ldots & & & & \\
a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \ldots & + & a_{mn}c_n & = & f_m.
\end{array}$$

Предположим, что каждый эксперимент имеет свою цену, известную экспериментаторам, а те желают провести наиболее дешёвую серию опытов для определения искомых коэффициентов c_i. Для этого им нужно в матрице $A = (a_{ij})$ выбрать n линейно независимых строк с наименьшим суммарным весом, где вес i-й строки есть стоимость i-го эксперимента. Эта задача разрешима, если ранг этой матрицы равен n; будем предполагать, что это условие выполняется.

Рассмотрим матроид строк матрицы A. Каждый базис матроида состоит из n линейно независимых векторов-строк. Базис наименьшего веса как раз и есть то, что нам требуется: он содержит строки, определяющие наиболее дешёвую систему экспериментов.

В заключение заметим, что в [4] приводится вариант жадного алгоритма для матричного матроида, основанный на классическом методе Гаусса приведения матрицы к треугольному виду. Трудоёмкость этого алгоритма — порядка m^2n операций.

7. Трансверсали

Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ — некоторая последовательность его непустых подмножеств (они могут пересекаться и даже совпадать). **Трансверсалью** (или **системой различных представителей**) для совокупности множеств P называют множество $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ такое, что для каждого числа i элемент t_i принадлежит множеству S_i; при этом при различных i и j элементы t_i и t_j также различны.

Другими словами, трансверсаль состоит из m различных представителей m множеств. Заметим, что при этом представителю одного множества не возбраняется быть членом и других множеств.

Трансверсаль любой подпоследовательности последовательности $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ называют **частичной трансверсалью** для P. Пустое множество также будем считать частичной трансверсалью: тогда *любое подмножество частичной трансверсали есть частичная трансверсаль.*

Пример 1. Имеется несколько работников, каждый из которых может выполнять определённое (своё для каждого работника) множество работ. При этом для выполнения каждой работы требуется ровно один человек. Требуется так распределить имеющуюся рабочую силу, чтобы каждая работа выполнялась. Формализуя эту задачу, имеем: E — множество работников, множество S_i состоит из тех работников, которые могут выполнять i-ю работу. Назначения на каждый вид работ сводятся к отысканию трансверсали для последовательности множеств $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$, где m — общее количество работ.

Пример 2. В некотором учреждении имеется m комиссий. Требуется из состава каждой комиссии назначить их председателей так, чтобы ни один человек не председательствовал более чем в одной комиссии. Здесь трансверсаль комиссий составят их председатели.

Пример 3. Пусть $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$, $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Легко видеть, что не существует трансверсали для $P = (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$, однако, например, элементы 1, 2, 3, 6 составляют трансверсаль для последовательности $P' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$, то есть частичную трансверсаль для P.

Необходимое и достаточное условие существования трансверсали даёт следующая

Теорема 6. *Пусть E — непустое конечное множество. Последовательность его непустых подмножеств $P = (S_1, S_2, \dots, S_m)$ имеет трансверсаль* *тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит не менее k элементов, где k — произвольное натуральное число, не превосходящее m.*

Доказательство. Сначала дадим краткую запись условия существования трансверсали из формулировки теоремы:

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq |A|. \tag{1}$$

Необходимость данного условия очевидна. Перейдём к достаточности.

Предварительно докажем

Утверждение. *Если в некотором множестве, например, в S_1, не менее двух элементов, то из этого множества можно удалить один элемент, не нарушив при этом условия* (1).

От противного: пусть $|S_1| \geq 2$ и, какой элемент ни удалить из S_1, условие (1) не будет выполнено. Возьмём два элемента x и y из множества S_1. Для них найдутся такие множества индексов $A' = \{1\} \cup A$ и $B' = \{1\} \cup B$, где $A, B \subset \{2, 3, \ldots, m\}$, что

$$|\bigcup_{i \in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\})| < |A'| = |A| + 1 \text{ и } |\bigcup_{i \in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\})| < |B'| = |B| + 1. \tag{2}$$

Положим:

$$X = \bigcup_{i \in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}), \; Y = \bigcup_{i \in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Соотношения (2) перепишем в виде:

$$|X| \leq |A|; \quad |Y| \leq |B|,$$

откуда

$$|X| + |Y| \leq |A| + |B|. \tag{3}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующий вариант формулы включения-исключения:

$$|C| + |D| = |C \cup D| + |C \cap D|, \tag{4}$$

где C и D — произвольные множества.

С помощью условия (1) оценим снизу мощности объединения и пересечения множеств X и Y. Поскольку

$$X \cup Y = \bigcup_{i \in A \cup B} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}) \cup (S_1 \setminus \{y\}) = \bigcup_{i \in A \cup B} S_i \cup S_1,$$

выполняется неравенство

$$|X \cup Y| \geq |A \cup B| + 1. \tag{5}$$

В силу того, что

$$X \cap Y \supset \bigcup_{i \in A \cap B} S_i,$$

имеем

$$|X \cap Y| \geq |A \cap B|. \tag{6}$$

Сложим неравенства (5) и (6), дважды использовав тождество (4):

$$|X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| \geq |A \cup B| + |A \cap B| + 1 = |A| + |B| + 1.$$

Полученное противоречие с неравенством (3) завершает доказательство утверждения.

Будем применять процедуру из утверждения до тех пор, пока у нас не останутся лишь одноэлементные множества. При этом в объединении любых k из них содержится k элементов. Значит, все эти множества попарно не пересекаются, а их объединение и есть искомая трансверсаль. □

Замечание. Искушённый читатель, наверное, сразу узнал в теореме о существовании трансверсали теорему Холла (см., например, [10]). Действительно, построим двудольный граф с долями $V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ и $V_2 = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$, в котором для каждого i множество S_i есть множество вершин, смежных с вершиной v_i. Тогда трансверсаль задаёт совершенное паросочетание из V_1 в V_2. В матримониальной трактовке теоремы Холла множество S_i состоит из девушек, знакомых i-му юноше, а трансверсаль есть множество счастливых невест. Идея изложенного выше доказательства, принадлежащего Р. Радо, позволяет получить более общий результат. Об этом пойдёт речь в §9.. А сейчас установим два следствия из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Пусть E — непустое конечное множество. Последовательность его непустых подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ имеет частичную трансверсаль мощности t тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит не менее $k + t - m$ элементов, где k — произвольное натуральное число, не превосходящее m, т.е.*

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S_i| \geq |A| + t - m.$$

Доказательство. Чтобы иметь возможность применить утверждение теоремы, возьмём множество D, имеющее мощность $m - t$ и не пересекающееся с E, и образуем новое семейство множеств $P' = (S'_1, S'_2, \ldots, S'_m)$, где $S'_i = S_i \cup D$. С помощью $m - t$ элементов множества D любая частичная трансверсаль мощности t дополняется до (полной) трансверсали. Обратно: если имеется трансверсаль для P', то выбросив из неё элементы множества D, получим частичную трансверсаль мощности не меньше t, а, значит, есть и частичная трансверсаль, мощность которой равна t. Таким образом, существование частичной трансверсали мощности t для P равносильно существованию полной трансверсали для P', а последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S'_i| = |\bigcup_{i \in A} S_i \cup D| = |\bigcup_{i \in A} S_i| + m - t \geq |A|.$$

Доказательство следствия 1 завершено. □

Следствие 2. *Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — последовательность его непустых подмножеств. Множество $X \subset E$ содержит частичную трансверсаль мощности t для P тогда и только тогда, когда*

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap X| \geq |A| + t - m.$$

Доказательство. Положим $S'_i = S_i \cap X$ (для каждого i) и применим к последовательности $P' = (S'_1, S'_2, \ldots, S'_m)$ предыдущее следствие. Получим условие

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad |\bigcup_{i \in A} S'_i| \geq |A| + t - m.$$

Но $\cup S'_i = \cup(S_i \cap X) = (\cup S_i) \cap X$. □

8. Трансверсальный матроид

Теорема 7. (Дж. Эдмондс, Д. Фалкерсон, 1965 г.) *Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — некоторая последовательность его непустых подмножеств, а J — множество всех частичных трансверсалей для P. Тогда $\langle E, J \rangle$ — матроид.*

Доказательство. Свойства J0 и J1, очевидно, имеют место. Проверим выполнение аксиомы независимости J2.

Прибегнем к наглядному представлению семейства множеств $P = (S_1, \ldots, S_m)$ с помощью двудольного графа G, который строится следующим образом. Вершины первой доли V_1 будут соответствовать множествам $S_1, \ldots, S_m$, вершины второй доли V_2 — элементам множества E, и (для каждого i) рёбра, инцидентные вершине S_i, соединяют её со всеми элементами множества S_i. Выделению системы различных представителей соответствует некоторое паросочетание (т.е. множество попарно несмежных рёбер) в этом графе: если элемент t_i представляет множество S_i, то в паросочетание войдёт ребро $S_i t_i$. Заметим, кстати, что в случае трансверсали имеем совершенное паросочетание из V_1 в V_2.

Пусть A и B — частичные трансверсали и $|A| = |B| + 1$. Нужно доказать, что найдётся элемент $e \in A \setminus B$ такой, что $B \cup \{e\}$ — частичная трансверсаль. Паросочетания, отвечающие указанным частичным трансверсалям, обозначим соответственно через W_A и W_B. Покрасим рёбра из $W_A \setminus W_B$ в красный цвет, из $W_B \setminus W_A$ — в синий, а из $W_A \cap W_B$ — в зелёный. Красных рёбер будет на одно больше, чем синих. Заметим также, что зелёное ребро не смежно ни с одним покрашенным ребром.

Рассмотрим подграф G' исходного графа, образованный красными и синими рёбрами. Так как два ребра одного цвета не могут быть смежны, степень каждой вершины в G' равна 1 или 2. Легко видеть, что компоненты связности G' представляют собой циклы и цепи. В каждом цикле и каждой цепи цвета рёбер чередуются. Поэтому в цикле, а также цепи чётной длины одинаковое количество красных и синих рёбер. Поскольку красных рёбер больше, чем синих, найдётся цепь C нечётной длины $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{2k}$, в которой первое и последнее ребро — красные. Ровно одна из концевых вершин цепи C лежит в V_2, пусть это вершина v_1. Эта вершина инцидентна только красному ребру и изображает элемент из $A \setminus B$. Каждая из вершин $v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}$ изображает элемент множества E и инцидентна как красному, так и синему ребру. Значит, $\{v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}\} \subset A \cap B$. Перекрасим теперь цепь C, заменив красный цвет синим, а синий красным.

Вернёмся к графу G. В результате произведённой перекраски множество вершин из V_2, покрытых синими и зелёными рёбрами, пополнилось вершиной v_1, то есть частичная трансверсаль B удлинилась за счёт элемента из $A \setminus B$. $\square$

Матроид, образованный частичными трансверсалями фиксированного семейства множеств P, будем называть **трансверсальным** и обозначать $M[P]$.

Приведём пример практической задачи, в которой возникает трансверсальный матроид.

Пример. Имеется m работников; i-й работник может выполнять работы из множества работ S_i, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть общее множество работ $E = \cup S_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, а прибыль от выполнения работы e_i равна $w(e_i)$. Требуется так распределить работы между работниками (при этом каждый выполняет не более одной работы, а для каждой работы нужен один работник; какие-то работы могут оказаться невыполненными, а какие-то работники могут остаться без работы), чтобы общая прибыль от выполнения работ была максимальной. Математически, задача сводится к отысканию частичной трансверсали наибольшего веса для последовательности множеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$. Другими словами, нужно найти независимое множество наибольшего веса в трансверсальном матроиде. Для этого, как нам уже известно, годится жадный алгоритм.

В книге [4] обсуждается программная реализация жадного алгоритма для трансверсального матроида, имеющая трудоёмкость порядка $n \sum |S_i|$ операций.

В заключение раздела, используем понятие трансверсального матроида для решения одной теоретической задачи.

Выясним, *каким требованиям должны удовлетворять множество* $A \subset E$ *и семейство множеств* $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$*, чтобы первое можно было дополнить до трансверсали второго*, т.е. чтобы семейство P имело трансверсаль, содержащую множество A. Очевидно, необходимыми являются следующие условия:

1. P имеет хотя бы одну трансверсаль.

2. A — частичная трансверсаль для P.

Удивительно, но эти условия являются и достаточными. **Доказательство** проводится очень просто, если опираться на теорию матроидов. Действительно, множество A, будучи частичной трансверсалью, является независимым множеством трансверсального матроида. Любое независимое множество можно расширить до базиса. Все базисы матроида имеют одну и ту же мощность. В силу условия 1 мощность базиса равна m. Значит, базис суть трансверсаль. □

9. Независимые трансверсали

Ранее мы установили необходимое и достаточное условие существования трансверсали для семейства подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ множества E. Теперь пусть на множестве E задан некоторый матроид. **Независимой трансверсалью** для P назовём трансверсаль, которая является независимым множеством в смысле указанного матроида. В частности, если матроид — дискретный, то любая трансверсаль — независимая. Следующая теорема даёт критерий существования независимой трансверсали.

Теорема 8. (Р. Радо, 1942 г.) *Пусть* $M = \langle E, J \rangle$ *— матроид. Последовательность* $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ *непустых подмножеств множества* E *имеет независимую трансверсаль тогда и только тогда, когда объединение любых* k *подмножеств из этой последовательности содержит независимое множество, в котором не менее* k *элементов, где* k *— произвольное натуральное число, не превосходящее* m*.*

Доказательство. Условие теоремы удобно сформулировать, используя понятие ранга множества (наибольшей мощности независимого подмножества):

$$\forall A \subset \{1, 2, \ldots, m\} \quad \rho(\bigcup_{i\in A} S_i) \geq |A|. \tag{1}$$

Необходимость. Если имеется независимая трансверсаль, то её пересечение с множеством $\cup_{i\in A} S_i$ имеет $|A|$ элементов, откуда $\rho(\cup_{i\in A} S_i) \geq |A|$.

Достаточность. Предварительно докажем

Утверждение. *Если в некотором множестве (например, в S_1) не менее двух элементов, то из этого множества можно удалить один элемент, не нарушив при этом условия (1).*

От противного: пусть $|S_1| \geq 2$ и, какой элемент ни удалить из S_1, условие (1) не будет выполнено. Возьмём два элемента x и y из множества S_1. Для них найдутся такие множества индексов $A' = \{1\} \cup A$ и $B' = \{1\} \cup B$, где $A, B \subset \{2, 3, \ldots, m\}$, что

$$\rho(\bigcup_{i\in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\})) < |A'| = |A| + 1 \text{ и } \rho(\bigcup_{i\in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\})) < |B'| = |B| + 1. \tag{2}$$

Положим:

$$X = \bigcup_{i\in A} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}), \; Y = \bigcup_{i\in B} S_i \cup (S_1 \setminus \{y\}).$$

Соотношения (2) перепишем в виде:

$$\rho(X) \leq |A|; \quad \rho(Y) \leq |B|,$$

откуда

$$\rho(X) + \rho(Y) \leq |A| + |B|. \tag{3}$$

С помощью условия (1) оценим снизу ранги объединения и пересечения множеств X и Y. Поскольку

$$X \cup Y = \bigcup_{i\in A\cup B} S_i \cup (S_1 \setminus \{x\}) \cup (S_1 \setminus \{y\}) = \bigcup_{i\in A\cup B} S_i \cup S_1,$$

выполняется неравенство

$$\rho(X \cup Y) \geq |A \cup B| + 1. \tag{4}$$

В силу того, что

$$X \cap Y \supset \bigcup_{i\in A\cap B} S_i,$$

имеем

$$\rho(X \cap Y) \geq |A \cap B|. \tag{5}$$

Используя свойство полумодулярности ранговой функции, после сложения (4) и (5) получим:

$$\rho(X)+\rho(Y) \geq \rho(X \cup Y)+\rho(X \cap Y) \geq |A \cup B|+|A \cap B|+1=|A|+|B|+1. \quad (6)$$

Неравенство (6) противоречит неравенству (3). Утверждение доказано.

Будем применять процедуру из утверждения до тех пор, пока у нас не останется m одноэлементных множеств $\{t_1\}, \{t_2\}, \ldots, \{t_m\}$. При этом ранг их объединения $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ равен m. Значит, T и есть искомая независимая трансверсаль. □

Следствие. *Пусть $M=\langle E, J\rangle$ — матроид. Последовательность $P=(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ непустых подмножеств множества E имеет независимую частичную трансверсаль мощности t тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из этой последовательности содержит независимое подмножество мощности не менее $k+t-m$, т.е.*

$$\forall A \subset \{1,2,\ldots,m\} \quad \rho(\bigcup_{i \in A} S_i) \geq |A|+t-m.$$

Доказательство вполне аналогично доказательству следствия 1 из теоремы 6..

10. Общие трансверсали

Критерий существования независимой трансверсали позволяет получить необходимое и достаточное условие существования общей трансверсали у двух различных систем подмножеств одного и того же множества. Имеет место

Теорема 9. *Два семейства $P=(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ и $Q=(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ непустых подмножеств конечного множества E обладают общей трансверсалью тогда и только тогда, когда для любых подмножеств A и B множества $\{1,2,\ldots,m\}$ выполняется неравенство*

$$|(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap (\bigcup_{i \in B} R_i)| \geq |A|+|B|-m.$$

Доказательство. Рассмотрим матроид частичных трансверсалей для P. Общая трансверсаль P и Q есть независимая (в указанном матроиде) трансверсаль Q. По теореме Радо независимая трансверсаль Q существует в том и только том случае, когда объединение любых k множеств R_i содержит независимое множество из k элементов, которое в нашем случае суть частичная трансверсаль мощности k. Применяя следствие 2 из теоремы 6., имеем

$$\forall A, B \subset \{1,2,\ldots,m\} \quad |(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap X| \geq |A|+k-m,$$

где $X = \bigcup\limits_{i \in B} R_i,\ k = |B|$. $\square$

Покажем, как свести нахождение общей трансверсали к нахождению максимального потока в сети.

Итак, имеем множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и два семейства его подмножеств $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ и $Q = (R_1, R_2, \ldots, R_m)$. Построим ориентированный граф, содержащий следующие вершины:

- a — источник, b — сток;
- вершины, изображающие подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_m, R_1, R_2, \ldots, R_m$;
- по две вершины на каждый элемент множества E: $v_1^{'}, v_1^{''}, v_2^{'}, v_2^{''}, \ldots, v_n^{'}, v_n^{''}$

и следующие дуги:

- aS_i и R_ib для $i = 1, 2, \ldots, m$;
- $S_iv_j^{'}$, если $e_j \in S_i$;
- $v_j^{''}R_i$, если $e_j \in R_i$;
- $v_i^{'}v_i^{''}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Положим пропускные способности всех дуг равными единице. Если существует общая трансверсаль $t_1, t_2, \ldots, t_m$ для P и Q, то в построенном графе есть m непересекающихся путей из источника в сток вида

$$a \to S_i \to v_k^{'} \to v_k^{''} \to R_j \to b,$$

где элемент e_k является представителем множеств S_i и R_j. Эти m путей формируют максимальный поток (его величина m) в построенной транспортной сети. После нахождения максимального потока легко указать общую трансверсаль.

Пример. Для множеств $S_1 = \{1, 2\},\ S_2 = \{1, 2, 3, 4\},\ S_3 = \{2, 4\}$, $R_1 = \{2, 3\},\ R_2 = \{1, 4\},\ R_3 = \{1, 2, 3\}$ имеем сеть (с единичными пропускными способностями всех дуг), изображённую на рис. 2. После нахождения максимального потока можно увидеть общую трансверсаль $\{1, 2, 3\}$, причём 1 является представителем множеств S_1 и R_2, 2 представляет S_3 и R_1, а 3 — множества S_2 и R_3.

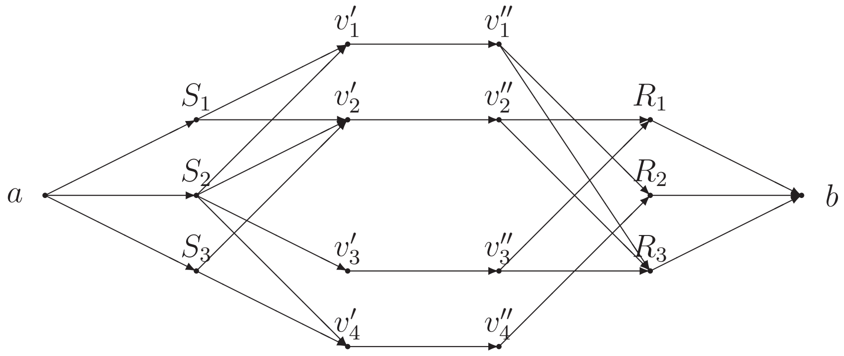

Рис. 2:

11. Некоторые интересные матроиды

Геометрическое представление матроидов малого ранга

Пусть в матроиде нет циклов длины 1 и 2, а ранг матроида не больше 4. Будем изображать такой матроид в виде графа, вершины которого соответствуют элементам матроида, и при этом:

- если три элемента матроида образуют цикл, то изображающие их точки лежат на одной прямой или гладкой кривой (например, окружности);
- если четыре элемента матроида образуют цикл, то соответствующие им точки лежат на одной плоскости.

Если полученному графу можно сопоставить многогранник, то, как это принято при изображении пространственных фигур, некоторые рёбра (невидимые) будем рисовать прерывистыми линиями.

11.1. Матроид Фано

Матроид Фано F изображён на рис. 3. Он обладает многими замечательными

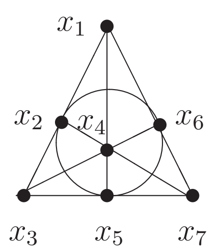

Рис. 3:

свойствами. Установим некоторые из них.

1. *Матроид Фано является бинарным.*

Действительно, рассмотрим линейное пространство с базисом $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ над полем $GF(2)$. Полученный векторный матроид изоморфен F. В этом легко убедиться, поставив в соответствие вершинам треугольника векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, середине каждой стороны — сумму векторов её концов, а центру — вектор $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. □

2. *Матроид Фано не является регулярным.*

Предположим, что матроид F представим над некоторым полем. Элементы этого поля будем обозначать греческими буквами с индексами. Заметим, что никакие два элемента в F не образуют зависимого множества; поэтому в записанных ниже выражениях одних векторов через другие все коэффициенты отличны от нуля. Итак, для некоторых скаляров α_{ij} и β_k имеют место равенства:

$$x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3; \quad x_6 = \alpha_{61}x_1 + \alpha_{67}x_7; \quad x_5 = \alpha_{53}x_3 + \alpha_{57}x_7;$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \beta_3 x_3 + \beta_6(\alpha_{61}x_1 + \alpha_{67}x_7) = \\ &= \beta_7 x_7 + \beta_2(\alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3) = \\ &= \beta_1 x_1 + \beta_5(\alpha_{53}x_3 + \alpha_{57}x_7). \end{aligned}$$

В силу единственности разложения вектора x_4 по базису (x_1, x_3, x_7) получаем равенства

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \beta_2\alpha_{23} = \beta_5\alpha_{53}; \\ \beta_1 &= \beta_6\alpha_{61} = \beta_2\alpha_{21}; \\ \beta_7 &= \beta_5\alpha_{57} = \beta_6\alpha_{67}. \end{aligned}$$

Перемножив правые и средние части трёх записанных соотношений и сократив на $\beta_2\beta_5\beta_6$, получим, что

$$\alpha_{21}\alpha_{53}\alpha_{67} = \alpha_{23}\alpha_{57}\alpha_{61}. \tag{1}$$

С другой стороны, из линейной зависимости векторов x_2, x_5, x_6 следует равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов разложений этих векторов по базису (x_1, x_3, x_7):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{61} & 0 & \alpha_{67} \\ 0 & \alpha_{53} & \alpha_{57} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_{21}\alpha_{53}\alpha_{67} = -\alpha_{23}\alpha_{57}\alpha_{61}. \tag{2}$$

Так как все скаляры α_{ij} в равенствах (1) и (2) отличны от нуля, получаем из этих равенств, что в нашем поле $1+1=0$.

Итак, если матроид Фано представим над некоторым полем, то это поле имеет характеристику 2. Это доказывает нерегулярность матроида. □

В дальнейшем матроид Фано будем рассматривать как векторный матроид с элементами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ над полем $GF(2)$.

3. *Матроид Фано не является трансверсальным.*

Доказательство от противного. Если матроид трансверсальный, то поскольку векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют независимое множество, без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{i} \in S_1$, $\mathbf{j} \in S_2$, $\mathbf{k} \in S_3$. Вектор $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \notin S_l$, где $l > 3$, так как в противном случае векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ были бы линейно независимы, что неверно. Пусть $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \in S_1$. Посмотрим, в каких множествах S_i может находиться элемент $\mathbf{i}+\mathbf{k}$. Он не входит в S_2 (иначе векторы $\mathbf{i}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{k}$ линейно независимы, что не имеет места) и в S_3 (иначе линейно независимыми окажутся векторы $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$). Но и при $l > 3$ вектор $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ не принадлежит S_l (в противном случае можно составить частичную трансверсаль из элементов $\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{k}$). Остаётся единственная возможность: $\mathbf{i}+\mathbf{k} \in S_1$. Аналогичные рассуждения, применённые к вектору $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, показывают, что он также входит лишь в множество S_1. Отсюда следует, что в нашем матроиде множество $\{\mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}\}$ является зависимым, а это неверно. □

4. *Матроид Фано является* **эйлеровым** (*то есть представим в виде объединения непересекающихся циклов).*

Действительно, имеем циклы $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\}$ и $\{\mathbf{i}+\mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{k}, \mathbf{j}+\mathbf{k}\}$. □

5. *Матроид Фано не является графическим.*

Пусть это не так. Отождествим элементы матроида с рёбрами графа G, матроид циклов которого изоморфен F. Рёбра $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}+\mathbf{j}$ образуют цикл, поэтому рёбра $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ смежны. Аналогично, смежны рёбра $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. В то же время $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ не образуют цикла. Если три ребра попарно смежны и не образуют цикла, то у них есть общая вершина. Получаем подграф графа G, изображённый на рис. 4. Из рисунка видно, что рёбра $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ не смежны, однако вместе с ребром

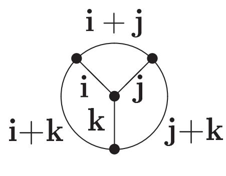

Рис. 4:

$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ они должны составлять цикл. Противоречие! □

6. *Матроид Фано не является кографическим.*

Вновь рассуждая от противного, отождествим элементы матроида с рёбрами графа G, матроид разрезов которого изоморфен F. Поскольку в матроиде Фано циклы состоят из трёх или четырёх элементов, в графе G любой разрез содержит три или четыре ребра. Значит, степень каждой вершины графа не меньше 3. По лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин графа G равна удвоенному числу рёбер, то есть $2 \cdot 7 = 14$. Отсюда следует, что в нашем графе не более четырёх вершин. Каждое ребро графа должно входить в некоторый его разрез (так как каждый элемент матроида входит в некоторый цикл); поэтому в графе нет петель. Поскольку для любых двух элементов матроида a и b можно указать цикл, включающий элемент a и не содержащий b, для каждого ребра графа найдётся разрез с этим ребром, но без любого другого (наперёд заданного). Значит, в графе нет кратных рёбер. Итак, имеем простой граф, в котором не больше четырёх вершин. Но тогда рёбер будет не более шести, а их семь. Пришли к противоречию. $\square$

11.2. Матроид Вамоса

Пусть $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Матроид Вамоса V удобно задать, назвав все его зависимые множества: это все подмножества E, в которых не менее пяти элементов, а также $\{1, 2, 5, 6\}$, $\{1, 2, 7, 8\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{3, 4, 7, 8\}$, $\{5, 6, 7, 8\}$. Графическое представление матроида — на рисунке.

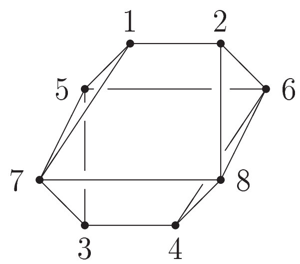

Рис. 5:

Сначала убедимся в том, что перед нами действительно матроид. Фактически нуждается в проверке лишь тот факт, что если A и B независимые множества и $|B| = 3$, $|A| = 4$, то в A найдётся такой элемент e, что $B \cup \{e\}$ — независимое множество. Когда $B \subset A$, это очевидно. В противном же случае множество $A \setminus B$ содержит по меньшей мере два различных элемента. Обозначим их через e_1 и e_2. Теперь осталось заметить, что из множеств $B \cup \{e_1\}$ и $B \cup \{e_2\}$ хотя бы одно независимое, так как по условию нет двух зависимых множеств из четырёх элементов, отличающихся одним элементом.

Докажем, что **матроид Вамоса — не векторный**, т.е. что **он не представим ни над каким полем**. Заметим, что среди всех таких матроидов он имеет наименьший порядок [13]. Этим он и замечателен.

Предположим, что существует изоморфный V векторный матроид $M = \langle E, J\rangle$, где $E = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}$, и для каждого i вектор x_i соответствует элементу i матроида Вамоса.

Множество $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ является базисом M. Запишем координаты каждого вектора в этом базисе: $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4})$. Для дальнейшего нам понадобятся также векторы $y_i = (a_{i1}, a_{i2}, 0, 0)$ и $z_i = (0, 0, a_{i3}, a_{i4})$, где $i = 1, 2, \dots, 8$.

Ввиду линейной зависимости векторов x_1, x_2, x_5, x_6 получаем равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{63} & a_{64} \end{vmatrix} = 0,$$

то есть векторы z_5 и z_6 линейно зависимы. Заметим, что вектор z_5 ненулевой (иначе были бы линейно зависимыми векторы x_1, x_2, x_5, а у нас любые три вектора линейно независимые). Поэтому для некоторого скаляра (то есть элемента числового поля, над которым рассматривается линейное пространство) μ имеет место равенство $z_6 = \mu z_5$. Точно так же из линейной зависимости четвёрок векторов $\{x_1, x_2, x_7, x_8\}$, $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_3, x_4, x_7, x_8\}$ получаем соответственно равенства $z_8 = \beta z_7$, $y_6 = \lambda y_5$, $y_8 = \alpha y_7$, где греческими буквами обозначены некоторые скаляры.

Наконец, используем линейную зависимость векторов x_5, x_6, x_7, x_8. С помощью найденных соотношений будем преобразовывать определитель, составленный из координат этих векторов (при этом вместо строк определителя для наглядности записываем поначалу соответствующие векторы):

$$\begin{vmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ y_6 + z_6 \\ y_7 + z_7 \\ y_8 + z_8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 + z_5 \\ \lambda y_5 + \mu z_5 \\ y_7 + z_7 \\ \alpha y_7 + \beta z_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_5 \\ \mu z_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ y_7 \\ \beta z_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_5 \\ \lambda y_5 \\ z_7 \\ \alpha y_7 \end{vmatrix} =$$

$$= \mu(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} - \lambda(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} y_5 \\ z_5 \\ y_7 \\ z_7 \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu - \lambda)(\beta - \alpha) \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь заметим, что $\mu \neq \lambda$ (в противном случае линейно зависимыми будут векторы $x_5 = y_5 + z_5$ и $x_6 = \lambda y_5 + \mu z_5$), а $\alpha \neq \beta$ (иначе линейно зависимы векторы x_7 и x_8). Поэтому равен нулю один из определителей $\begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} a_{53} & a_{54} \\ a_{73} & a_{74} \end{vmatrix}$ — например, первый из них. Но тогда

$$\begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{71} & a_{72} \end{vmatrix} = 0,$$

то есть векторы x_3, x_4, x_5, x_7 линейно зависимы, что противоречит условию. $\square$

12. Перечисление матроидов

Известно очень мало аналитических результатов о числе матроидов того или иного вида. В [12] и [13] приводятся асимптотические оценки $f(n)$ — числа попарно неизоморфных матроидов на (фиксированном) n-элементном множестве:

$$n - \frac{3}{2}\log_2 n + O(\log_2\log_2 n) \leq \log_2\log_2 f(n) \leq n - \log_2 n + O(\log_2\log_2 n).$$

К 1972 г. были перечислены лишь матроиды порядка не более 5 (см. [9]). В 2000 г. ирландский математик В. Дьюкс в своей диссертации [12] предложил алгоритм, позволивший найти все матроиды до 8-го порядка включительно.

Пусть $f_r(n)$ число попарно неизоморфных матроидов на (фиксированном) n-элементном множестве, имеющих ранг r. Очевидно,

$$f(n) = \sum_{r=0}^{n} f_r(n).$$

Как указывает сам Дьюкс, для подсчёта $f_4(9)$ его программе понадобится около 44 лет на компьютере Athlon 1GHz.

Выпускник кафедры прикладной математики ЮУрГУ 2003 г. Сергей Новокшонов смог существенно улучшить алгоритм Дьюкса и в своей дипломной работе впервые нашёл все матроиды 9-го порядка. В частности, для обнаружения всех матроидов 9-го порядка, имеющих ранг 4, понадобилось около двух суток на компьютере Celeron 700MHz. Были перечислены бинарные, тернарные, регулярные, графические, кографические и планарные матроиды до 9-го порядка включительно.

Работу Новокшонова продолжил выпускник кафедры прикладной математики 2004 г. Александр Радионов. После модификации программы удалось вычислить $f_3(11)$ и $f_8(11)$. Осуществлено также перечисление **четвертичных** (т.е. представимых над $GF(4)$) матроидов и трансверсальных матроидов.

Комбинаторной геометрией называют матроид, каждый элемент основания которого входит в некоторое независимое множество (другими словами, в нём нет **петель** — циклов длины 1). Обозначим через $c_r(n)$ число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n и ранга r. Несложно видеть, что

$$f_r(n) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i c_r(i).$$

В следующих таблицах приводятся значения, вычисленные в дипломных работах С. Новокшонова и А. Радионова. Они дают более полные сведения о числе матроидов различного вида, чем те, которые содержатся в ”Энциклопедии целых последовательностей” Слоана [14].

Число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n и ранга r

n / r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2		1	2	4	6	10	14	21	29	41	55
3			1	3	9	25	70	217	950	8762	288454
4				1	4	18	85	832	189274	?	?
5					1	5	31	288	189889	?	?
6						1	6	51	1217	?	?
7							1	7	79	9950	?
8								1	8	119	298363
9									1	9	173
10										1	10
11											1

Число попарно неизоморфных комбинаторных геометрий порядка n различных классов

Порядок матроида n / Класс матроидов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
бинарные	1	2	4	8	16	36	80	194	506
тернарные	1	2	4	9	19	49	131	424	1652
четвертичные	1	2	4	9	21	57	173	681	3849
регулярные	1	2	4	8	16	36	78	186	470
графические	1	2	4	8	16	36	78	186	469
кографические	1	2	4	8	16	36	78	186	469
планарные	1	2	4	8	16	36	78	186	468
трансверсальные	1	2	4	9	21	58	183	760	5007
общее количество	1	2	4	9	21	60	208	1418	381448

13. Упражнения

1. Доказать, что с точностью до изоморфизма число матроидов порядка n не превосходит 2^{2^n}.

2. Найти ранг, все базисы и циклы матроида столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

обозначая i-й столбец матрицы через e_i.

3. На рис. 6 изображён граф G. Для а) матроида циклов $M(G)$; б) матроида

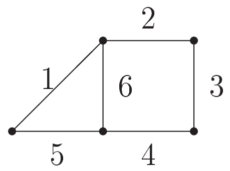

Рис. 6:

разрезов $M^*(G)$ найти все циклы и базисы.

4. Пусть в матроиде M, заданном на множестве $E = \{1, 2, 3\}$, есть ровно два базиса: $\{1, 2\}$ и $\{1, 3\}$. Доказать, что этот матроид планарный, построив такие графы G_1 и G_2, что матроид M изоморфен матроиду циклов $M(G_1)$ и матроиду разрезов $M^*(G_2)$.

5. Покажите, что все матроиды порядка не выше 3 графические, построив соответствующие графы. Подсчитайте количество попарно неизоморфных матроидов порядка 0, 1, 2 и 3.

6. Доказать, что матроид $U_{n-1,n}$ — графический.

7. Доказать, что матроид $U_{1,n}$ — кографический.

8. Доказать, что матроид $U_{2,4}$ не является ни графическим, ни кографическим.

9. Укажите все попарно неизоморфные матроиды порядка 4. Сколько среди них не являются графическими?

10. Доказать, что матроиды $M(K_5)$ и $M(K_{3,3})$ — не кографические.

11. Через $M_q[A]$ обозначим матроид столбцов матрицы A над полем $GF(q)$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Найти три столбца матрицы A, образующие цикл в $M_2[A]$ и базис в $M_3[A]$.
2) Доказать, что $M_2[A]$ — графический матроид, а $M_3[A]$ — нет.
3) Доказать, что матроид $M_2[A]$ представим над полем $GF(3)$, а $M_3[A]$ не представим над $GF(2)$.

12. Доказать, что графический матроид представим над любым полем.

13. Для каждого из следующих семейств подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ выяснить, имеет ли оно трансверсаль:
$P_1 = (\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\})$;
$P_2 = (\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\})$;
$P_3 = (\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\})$;
$P_4 = (\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\})$.

14. Доказать, что любой матроид ранга 1 трансверсален.

15. Доказать, что k-однородный матроид трансверсален.

16. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

17. Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: "Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!" Вторая сваха говорит: "А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая сможет выйти замуж за знакомого юношу!" Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: "В таком случае я могу сделать и то, и другое!" Прав ли он?

18. Пусть E — непустое конечное множество, $P = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — некоторая последовательность его подмножеств. Частичные трансверсали P определяют трансверсальный матроид ранга r. Доказать, что этот матроид можно задать последовательностью из r множеств.

19. Доказать, что с точностью до изоморфизма число трансверсальных матроидов порядка n не превосходит 2^{n^2}.

20. Найти число попарно неизоморфных комбинаторных трансверсальных геометрий порядка n и ранга $n-1$.

21. Найти число попарно неизоморфных трансверсальных матроидов порядка n и ранга $n-1$.

22. Найти число попарно неизоморфных комбинаторных трансверсальных геометрий порядка n и ранга 2.

23. Найти число попарно неизоморфных трансверсальных матроидов порядка n и ранга 2.

24. Доказать, что матроид, изображённый на рис. 7, — не бинарный, но тернарный.

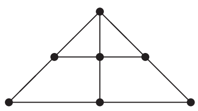

Рис. 7:

25. Доказать, что матроид из предыдущего упражнения не является трансверсальным.

26. Пусть C — цикл. Доказать, что $\rho(C) = |C| - 1$.

27. Пусть A и B — различные циклы матроида, имеющие общий элемент e. Доказать, что существует цикл $C \subset (A \cup B) \setminus \{e\}$.

28. Пусть A — независимое множество, e — произвольный элемент. Доказать, что в множестве $A \cup \{e\}$ не более одного цикла.

29. Найти $U^*_{k,n}$.

30. Доказать, что матроид $U_{2,3}$ — регулярный.

31. Над какими полями представим матроид $U_{2,4}$?

32. На рис. 8 изображены графы G_1 и G_2. Относительно матроидов циклов этих графов выяснить, являются ли они трансверсальными.

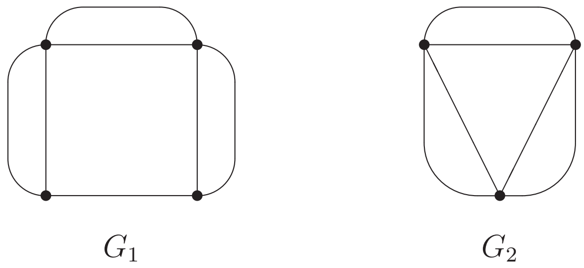

Рис. 8:

Ответы. Указания. Решения

5. 1, 2, 4, 8.

9. Всего 17 матроидов, из них 16 графических.

16. Прав. См. конец §8..

17. Ответ. Прав.

Доказательство. Отметим на прямой точки, изображающие юношей, а на параллельной прямой — точки, изображающие девушек. Точки, соответствующие брюнетам и блондинкам, покрасим соответственно в синий и жёлтый цвет. Остальные точки будем называть белыми. Вариант образования супружеских пар, имеющийся у первой свахи, изобразим синими отрезками, а вариант второй свахи — жёлтыми. Некоторые отрезки при этом станут зелёными. Наша цель — найти попарно не смежные цветные отрезки (то есть без общих концов), покрывающие в совокупности все цветные точки.

Каждый зелёный отрезок не смежен ни с каким другим цветным отрезком. Ясно также, что отрезки одного цвета попарно не смежны. Поскольку каждая цветная точка является концом одного или двух цветных отрезков, синие и жёлтые отрезки образуют несколько ломаных (отрезок считаем частным случаем ломаной) без общих концов, причём цвета звеньев любой ломаной чередуются.

Если ломаная замкнутая, то её звенья синего цвета покрывают все её вершины, поэтому можно стереть жёлтые звенья этой ломаной. Пусть теперь ломаная незамкнутая. Так как каждая цветная точка порождает свой цветной отрезок, концы ломаной не могут быть оба белыми (иначе цветных точек будет меньше, чем цветных отрезков). Возьмём цветной конец ломаной и пойдём по ней. Другой её конец будет белым, так как в каждую цветную точку мы попадаем, идя по отрезку другого цвета, и, значит, ломаная продолжается отрезком цвета этой точки. Таким образом, звенья ломаной, имеющие цвет её цветного конца, покрывают все её цветные вершины. Звенья другого цвета стираем.

В результате у нас останутся цветные отрезки без общих концов, покрывающие все цветные точки. Задача решена.

18. Рассмотрим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором вершины первой доли соответствуют множествам S_i, а второй — элементам множества E. Ребро $S_i e_j$ присутствует в графе тогда и только тогда, когда $e_j \in S_i$.

Любое независимое множество трансверсального матроида можно теперь рассматривать как множество вершин второй доли, покрытое некоторым паросочетанием.

Зафиксируем некоторую максимальную частичную трансверсаль. Ей отвечает некоторое паросочетание мощности r. Пусть оно покрывает множество A вершин из V_1.

Возьмём теперь произвольное независимое множество матроида — множество B вершин из V_2, покрываемое некоторым паросочетанием. Согласно задаче 17 существует паросочетание, покрывающее одновременно множества A и B. Его мощность не меньше r (поскольку покрывает A), но и не больше r (это ранг матроида) — значит, она равна r.

Таким образом, элементы множества B образуют частичную трансверсаль для системы множеств A. Стало быть, если мы сохраним в P лишь множества, вошедшие в A, то получим тот же самый матроид.

20. $n-1$. **Решение.** Число различных базисов трансверсальной комбинаторной геометрии порядка n и ранга $n-1$ принимает значения $2, 3, \ldots, n$. Пусть имеется ровно k базисов. Тогда $n-k$ элементов входят во все базисы, а оставшиеся k элементов этим свойством не обладают. Отсюда следует изоморфизм любых двух таких матроидов.

Пример системы множеств, порождающей матроид указанного вида с k базисами: $P = (\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n-k\}, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1})$, где
$A_1 = A_2 = \ldots = A_{k-1} = \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$.

21. n. **Решение.** Если матроид порядка n и ранга $n-1$ не является комбинаторной геометрией, то в нём одна петля, а оставшиеся элементы образуют единственный базис.

22. Пусть M — трансверсальная комбинаторная геометрия ранга 2. Как следует из задачи 18, M можно задать системой из двух множеств $P = (S_1, S_2)$. Множества S_1 и S_2 упорядочим таким образом, что $|S_1| \leq |S_2|$. Поскольку M — комбинаторная геометрия порядка n, $\quad |S_1 \cup S_2| = n$.

Положим $T_1 = S_1 \setminus S_2, n_1 = |T_1|,\ T_2 = S_2 \setminus S_1, n_2 = |T_2|,\ T_3 = S_1 \cap S_2$. Заметим, что $n_1 \leq n_2$. Назовём **характеристикой** матроида упорядоченную пару чисел (n_1, n_2).

Легко описать все циклы матроида M. Любые два различных элемента из T_1 (как и из T_2) образуют цикл, и других циклов длины два в матроиде нет.

Если $T_1 = \phi$, то перенесём один элемент из T_3 в T_1. Очевидно, что получится матроид, изоморфный M. Аналогично поступим, если $T_2 = \phi$ (случай $|T_1| = |T_2| = 0, |T_3| = 1$ в матроиде ранга 2 невозможен).

Таким образом, будем считать, что характеристика матроида удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n - n_1.$$

Докажем, что

Трансверсальные комбинаторные геометрии ранга 2 с мощностью основания n изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают их характеристики.

Доказательство. Пусть матроиды M и M' задаются системами множеств $P = (S_1, S_2)$ и $P' = (S'_1, S'_2)$, и при этом
$T_1 = S_1 \setminus S_2 \neq \phi$; $T_2 = S_2 \setminus S_1 \neq \phi$; $T_3 = S_1 \cap S_2$;
$T'_1 = S'_1 \setminus S'_2 \neq \phi$; $T'_2 = S'_2 \setminus S'_1 \neq \phi$; $T'_3 = S'_1 \cap S'_2$.

Если характеристики матроидов совпадают, то $|T_1| = |T'_1|, |T_2| = |T'_2|$ и $|T_3| = |T'_3|$, что говорит о существовании биекции между T_i и T'_i для $i = 1, 2, 3$. В силу описанной выше структуры циклов трансверсального матроида ранга 2 отсюда следует изоморфизм матроидов.

Если же характеристики матроидов разные, то и их стуктуры циклов различаются — значит, матроиды неизоморфны.$\square$

Из доказанного утверждения вытекает, что число попарно неизоморфных трансверсальных комбинаторных геометрий ранга 2 с мощностью основания n совпадает с количеством упорядоченных пар натуральных чисел (i, j) таких, что $1 \leq i \leq j \leq n - i$.

Рассмотрим следующие множества, составленные из упорядоченных пар натуральных чисел:
$A = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq j \leq n-i\}$, $B = \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$.

Тогда
$A \setminus B = \{(i,j) \mid 1 \leq i < n-j+1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$; $B \setminus A = \{(i,j) \mid 1 \leq j < i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

Функция $\varphi : (i,j) \to (n-j+1, i)$ осуществляет биективное отображение множества $A \setminus B$ на множество $B \setminus A$. Значит, множества A и B равномощны. В то же время, легко видеть, $|B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Таким образом, получаем

Ответ: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

23. $\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$ при $n = 2k$; $\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$ при $n = 2k+1$.

Библиографический список

[1] Айгнер М. *Комбинаторная теория.* — М.: Мир, 1982. – 558 с.

[2] Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. *Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы.* — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 288 с.

[3] *Введение в криптографию*/ Под ред. В.В. Ященко. — М.: МЦНМО-ЧеРо, 1999. – 272 с.

[4] Липский В. *Комбинаторика для программистов.* — М.: Мир, 1988. – 213 с.

[5] *Лекции по теории графов*/ В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов и др. — М.: Наука, 1990. – 384 с.

[6] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов.* — СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

[7] Пападимитриу Х., Стайглиц К. *Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность.* — М.: Мир, 1985. – 512 с.

[8] Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ.* — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 308 с.

[9] Уилсон Р. *Введение в теорию графов.* — М.: Мир, 1977. — 208 с.

[10] Эвнин А.Ю. *Вокруг теоремы Холла.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 71 с.

[11] Эвнин А.Ю. *Дискретная математика: Конспект лекций.* — Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 176 с.

[12] Dukes W.M.B. *Counting and Probability in Matroid Theory.* — School of Mathematics, University of Dublin, 2000. – 123 p.

[13] Oxley J.G. *Matroid Theory.* — New York: Oxford Univ. Press, 1992. – 532 p.

[14] Sloane N.J.A. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences.* — http:// www.research.att.com/njas/sequences, 2004.

[15] Welsh D.J.A. *Matroid Theory.* — London: Academic Press, 1976. – 433 p.